

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών απόδειξη παράγρ.1.8 σχολικό βιβλίο
- A2.** Ορισμός παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο
- A3.** (Λ) πχ $f(x) = x^3 |_{\mathbb{R}}$ *f γνησίως αύξουσα* $|_{\mathbb{R}}$ αλλά $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$.
- A4.** $\alpha) \rightarrow \Lambda, \beta) \rightarrow \Sigma, \gamma) \rightarrow \Sigma, \delta) \rightarrow \Sigma, \epsilon) \rightarrow \Sigma,$

ΘΕΜΑ Β

- B1.** $A_f = (1, +\infty)$ $A_g = \mathbb{R}$

Η $f \circ g$ ορίζεται στο σύνολο

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ ώστε } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ ώστε } e^x > 1\} = (0, +\infty).$$

Οπότε $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0.$

- B2.** Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty) : (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 2)(e^{x_1} - 1) \Rightarrow e^{x_1 x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1 x_2} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$

Οπότε $f \circ g$ είναι 1-1 άρα υπάρχει η

$$(f \circ g)^{-1} : (f \circ g)((0, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \quad (1)$$

$$\text{Αν } y=1 \quad \eta (1) \Leftrightarrow 0e^x = 3 \text{ αδύνατη, άρα } 1 \notin (f \circ g)((0, +\infty))$$

$$\bullet \text{Αν } y \neq 1 \quad \eta (1) \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1}.$$

$$\text{Πρέπει } \frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2 \quad \eta \quad y > 1 \quad (2)$$

και

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \text{ αλλά } x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1 \quad (3)$$

Από (4), (3) τελικά $y > 1$

$$\text{Έτσι: } \varphi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x > 1$$

$$\text{B3. Για } x > 1: \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x+2} \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$$

Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0.$$

ή για το (B2) μελετάμε τη μονοτονία της $f \circ g$ μέσω παραγώγου και σύνολο τιμών της με όρια.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Η f συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ομοίως ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Άρα πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0. \quad (1)$$

Θεωρώ $\varphi(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$ με $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Από (1) είναι $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Γ2 Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\text{Για } x < 0: \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\text{Για } x > 0: \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Άρα η εφαπτόμενη στο Α (0,1) έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx' είναι:

$$\varepsilon \varphi \omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \quad (\omega \in [0, \pi))..$$

Γ3. Για $x < 0: f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\text{Για } x > 0; f'(x) = (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)' = \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x \leq 0 \\ \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Για } x \leq 0 \text{ είναι } f'(x) > 0.$$

$$\text{Για } 0 < x < \frac{3\pi}{2} : f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = \sin x$$

$$\stackrel{\sin x \neq 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon \phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4} \text{ αφού } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = 0$ στα $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$ αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$.

$$\text{Για } y = 0 \Rightarrow -f(\alpha) = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) \Leftrightarrow x = \frac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι

$$B\left(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, 0\right)$$

$$\text{Επομένως } x_B = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{1 - a}{1} = \alpha - (1 - a) = 2a - 1.$$

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι:

$$x_B(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow x'_B(t) = 2a'(t) \Rightarrow x'_B(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow x'_B(t) = -\frac{2}{3}a(t) \quad (1)$$

Όμως ισχύει $a(t_0) = -1$

Από (1) για $t = t_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3} \quad \frac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$$

$$\Delta_1 \quad f'(x) = e^x + 2x - e$$

· f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 1 - e < 0 \\ f'(1) = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0) \cdot f'(1) < 0$$

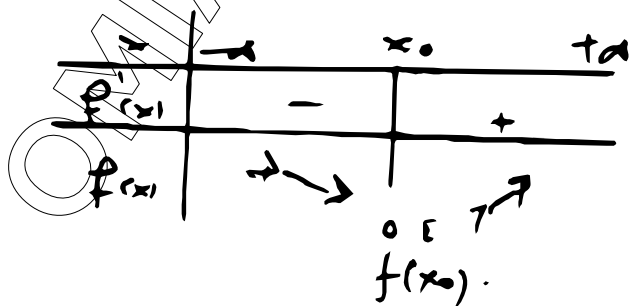
Από το Δ. Bolzano $\exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = 0$

$$\text{Εκεί } f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \uparrow$$

οπότε για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f' \downarrow$
στο $[0, x_0]$

για $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f' \uparrow$
στο $(x_0, 1)$

οπότε έχει μόνο ένα ριζικό στο x_0



$$\text{Εξω } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Rightarrow$$

$$e^{x_0} = e - 2x_0$$

$$\text{οπότε } f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$$

$$= e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1$$

$$= x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

$$\underline{\text{Δ3:}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

$$\text{Έχω} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

να $f(x) > f(x_0)$ κοντά στο x_0

αφ' ου στο x_0 έχω ολικό ελάχιστο.

$$\text{Με} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$$

$$\text{Είναι} \quad \text{για } x \neq x_0: \quad -1 \leq \eta \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \text{ με}$$

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \left(\frac{1}{x - x_0} \right)$$

Επομένως από γνωστή πρόταση προκύπτει ότι

$$\text{δηλ.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) = +\infty$$

Δ3. Given $g(x) = f(x) + x - x_0$

It g is convex on $[x_0, 1]$ we need to show

$$g'(1) = f'(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$$

$$= g'(1)g'(x_0) < 0$$

$$g(x_0) = f(x_0) < f'(1) = 0$$

$$\hookrightarrow x_0 \in (\Delta_1)$$

Ans D. Bolzano $\exists p \in (x_0, 1) : g(p) = 0$

$$f(p) + p = x_0$$

$$g'(x) = f'(x) + 1$$

For $x > x_0$ $\frac{p'(x)}{x} : f'(x) > f'(x_0) = 0$

As $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, 1) \Rightarrow g \uparrow \text{ on } [x_0, 1]$

As $\sim p$ is a root of $p' \sim$ on $[x_0, 1]$

Δ4.

$$5. \quad f(x_0) > f(p) (f'(k) + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) > f(p) \cdot f'(k) + f(p) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) - f(p) > (x_0 - p) f'(k) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - p < 0$$

$$\frac{f(x_0) - f(p)}{x_0 - p} < f'(k)$$

Αρα, για f in f στο $[x_0, p]$

$$\Leftrightarrow \exists \xi \in (x_0, p) \quad f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(p)}{x_0 - p}$$

$$\text{Οτι, } \xi < k \Rightarrow f'(\xi) < f'(k) \text{ α}$$

$$\frac{f(x_0) - f(p)}{x_0 - p} < f'(k)$$

Δ_4

2^η λύση

$$f(x_0) > f(p)(f'(x) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(p)f'(x) - f(p)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - f(p)f'(x) - f(p) > 0$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση
 $\phi(x) = f(x_0) - f(p)f'(x) - f(p)$ με $x \in [p, 1]$
είναι $\phi(x) > 0$.

Έστω $[x_0, p]$ από ΘΜΤ υπάρχει

ένα τυλ. $\xi \in (x_0, p)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(p)}{x_0 - p} \Leftrightarrow f(x_0) - f(p) = f'(\xi)(x_0 - p)$$

Από το Δ_3 είναι $f(p) + p = x_0 \Rightarrow f(p) = x_0 - p < 0$.

$$\text{Άρα } \phi(x) = f'(\xi)(x_0 - p) - (x_0 - p)f'(x) \Rightarrow$$

$$\phi(x) = (x_0 - p)(f'(\xi) - f'(x))$$

Είναι $\phi'(x) = (x_0 - p)(-f''(x)) > 0$, αφού $x_0 - p < 0$ κ' $f''(x) < 0$

$\Rightarrow \phi \uparrow$ στο $[p, 1]$ Άρα για $p < x < 1$

$$\Rightarrow \phi(x) > \phi(p) = (x_0 - p)(f'(\xi) - f'(p)) \quad (1)$$

$$\text{Αφ'ότι } \xi < p \xrightarrow[f' \uparrow]{f'' < 0} f'(\xi) < f'(p) \Rightarrow f'(\xi) - f'(p) < 0$$

$$\text{και } x_0 - p < 0 \xrightarrow{(1)} \phi(x) > \phi(p) > 0 \Rightarrow \phi(x) > 0$$